

大长细比自应力套管柱的理论实验

袁鑫 Yuan Xin

上海同基钢结构技术有限公司

Shanghai Co-base Structural Steel Co., Ltd.

摘要:

通过给外管和内棒施加大小相等方向相反的自平衡预应力，将两者装配成自预应力超大长细比套管柱(下文简称“S柱”)。本文对它进行理论分析和实验研究，发现其失稳模式为高阶屈曲，并得出其临界承载力远超过相同外形尺寸、材质和边界条件的欧拉柱的结论。“S柱”受外压力时，外管在工作全过程中为内棒提供侧向恢复力，这使得“S柱”整体呈现多半波失稳的形态，受压承载力可提高到欧拉临界力的120倍以上，进而可做到由材料强度控制。

关键词: 自预应力, 超长细比, 高阶屈曲, 稳定, 临界力

作者联系方式: 袁鑫 13651630795 nixnauy@gmail.com

Abstract:

Self-stressing column (S column) consists of a sleeve tube, a steel core, and their connections at the columns ends. Under the pre-stresses, the tube is in tension, and core in compression as a self-balanced structure. When S column has a large slenderness ratio, its ultimate compressive capacity reaches more than one hundred time of Euler buckling strength of a conventional steel column of the same geometry and under similar load conditions. Euler buckling of the inner core is effectively restrained by the pre-tensioned sleeve tube, which provides restoring lateral force, and force the core buckle to high modes. A mechanic theory of S columns is derived in this article, and verified by the material experiments.

Key words: self-prestressing, super slender, high mode buckling, stability, critical force

1 前言

1.1 欧拉于1744年提出了两端铰接的理想弹性细长压杆小挠度下的临界力公式： $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} (1)$ ，是压杆稳定计算与应用的理论基础。后续研究发现大变形下可以获得稍高的承载力，见图1，但因所需变形超过工程许可，无实际应用意义^[1 p69-74]。

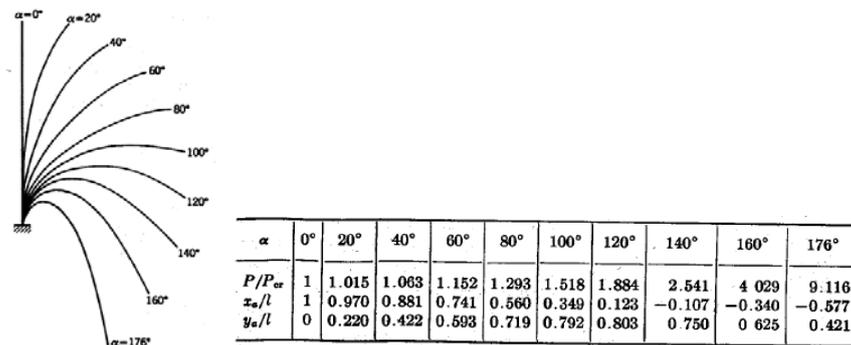


图1 大变形时临界力的提高 (来自文献1)

- 1.2 比利时工程师 M. Duyster 发现了预应力可以提高混凝土柱的受压性能，G.Magnal 教授做了进一步研究及实验验证，并提出被内部拉索连续侧支的混凝土柱不可能屈曲的错误结论^[2 p221-224]，本文推导过程表明柱子的受压临界力和初始预应力及材料强度等有关。
- 1.3 1950年代苏联 E. Belenya 教授研究了预应力杆的受压性能，通过在内部布置隔板和拉索给受压部件提供侧向约束，进而提高其承载力，见图2。研究限于施加预应力过程，相当于本文所研究的“S柱”的组装阶段受力。它在工程中仅作为预应力拉杆使用，未考虑承受外压力的情况^{[3 p81] [4]}。



图2 隔板柱 (来自文献3)

捷克理工大学在 Belenya 的基础上研究了预应力杆的受压性能，并于 1989 年提出了计算长度修正公式，见图 3、4。

$$L_{cr} = a \sqrt{\frac{n^2 + K^2 \kappa}{1 + \kappa}}$$

$$\kappa = \frac{P - X}{N}$$

$$X = \frac{A_p E_p}{AE + A_p E_p}$$

图3 隔板柱的修正计算长度

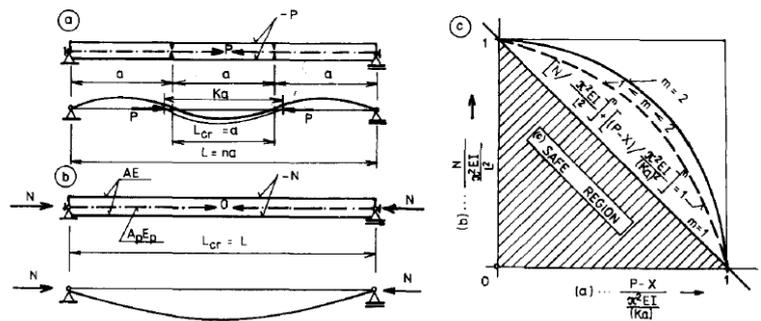


图4 隔板柱附图

预应力柱的临界力会有明显提高，其实用构造参见中国专利（专利号：201620176825.3），见图 5。

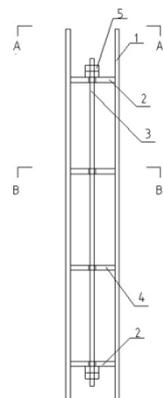


图5 预应力隔板柱

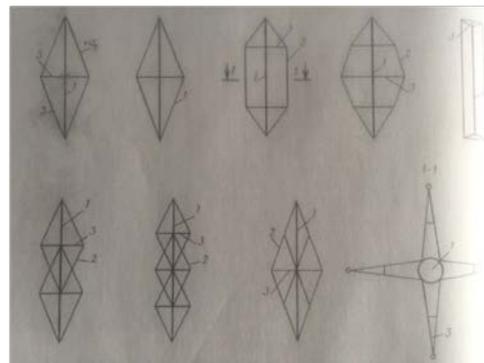


图6 预应力撑杆 (来自文献3)

但隔板的使用使得, 拉杆对压杆的侧向约束不连续，且较大的间隙也限制了预应力效果。

1.4 Belenya 还研究了单外伸臂 (crossarm) 及多外伸臂预应力撑杆^[3 p110]，见图 6。通过在外围布置外伸臂及索杆来减小撑杆的计算长度，获得较大的承载力，并通过实验及分析研究给出了计算方法并应用于实际工程。加拿大 H. Hafez 对单伸臂预应力撑杆做了研究，1977 年给出了最优初始预应力^[5]。此后英国教授 M. Wadee 的团队对单伸臂预应力撑杆做了进一步的研究^[6]，见图 7。近年又发展到多外伸臂^[7]，见图 8。预应力撑杆在理论和实际工程应用中都取得长足进展，但因外伸臂及索/杆存在，从整体尺寸看也没有超过欧拉临界力。

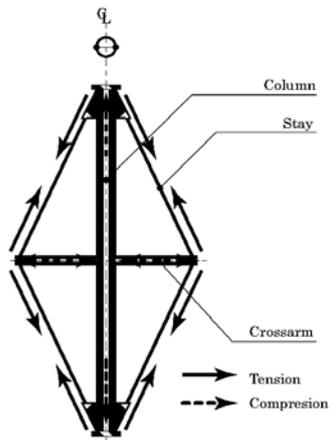


图 7 单外伸臂撑杆 (来自文献 6)

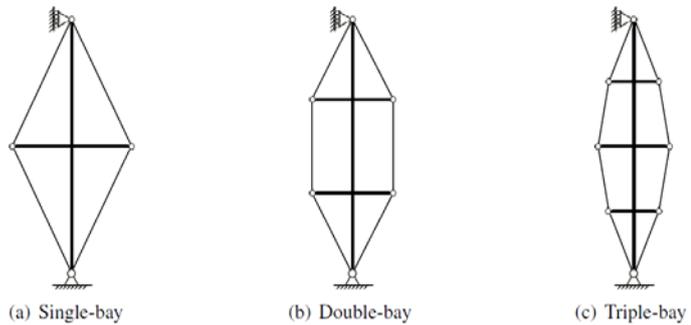


图 8 多外伸臂撑杆 (来自文献 7)

1.5 1970 年代起日本研究并提出了屈曲支撑(BRB)的概念,用于抗震建筑中的支撑构件,其受压内核使用低屈服点软钢,具有良好的耗能作用但承载力较低。BRB 通过外管的抗弯刚度为内棒提供的侧向约束,使得内棒受压承载力有限提高^[8],从 BRB 整体看没有超过欧拉临界力,见图 9。

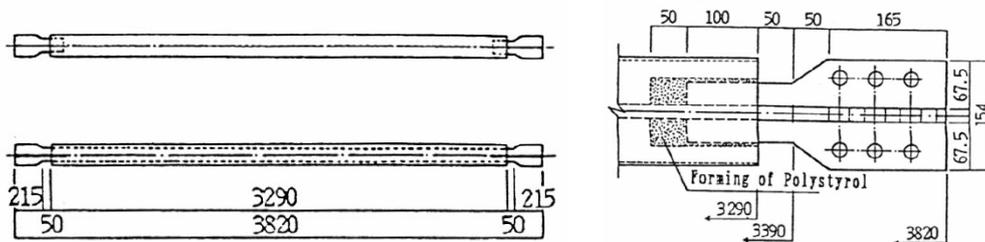


图 9 屈曲约束支撑 (来自文献 8)

1.6 印度 B. Sridhara 等 1982 年起研究了套管柱的受压性能,根据不同的长细比得出承载力提高 40-70%^[9]。1992 年美国工程师 Badri K. Prasad 对此做了实验验证^[10],见图 10。关于套管柱的实验研究,其受压内核为低屈服点软钢或聚碳酸酯/丙烯酸塑料,研究及工程应用的局限和前述 BRB 类似。

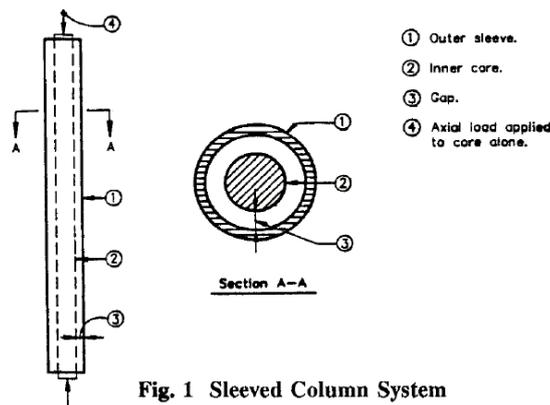


Fig. 1 Sleeved Column System

图 10 无预应力套管柱 (来自文献 10)

1.7 英美、日本等国陆续有相近的预应力压杆专利申请,均都限于构造设计,未能提出设计方法或临界力计算公式及初始预应力值的确定。

综上所述,在既有的研究中均没有出现同等条件下对欧拉临界力的超越,或无法给出有效计算方法。本文提出的“S 柱”的受压临界承载力 N_{cr} 在外形尺寸、材质及边界条件与欧拉柱相同的情况下,远超欧拉临界力,并给出了临界力及初始预应力的计算公式。

2 正文

2.1 “S 柱”构造与假定

2.1.1 “S 柱”构造方法

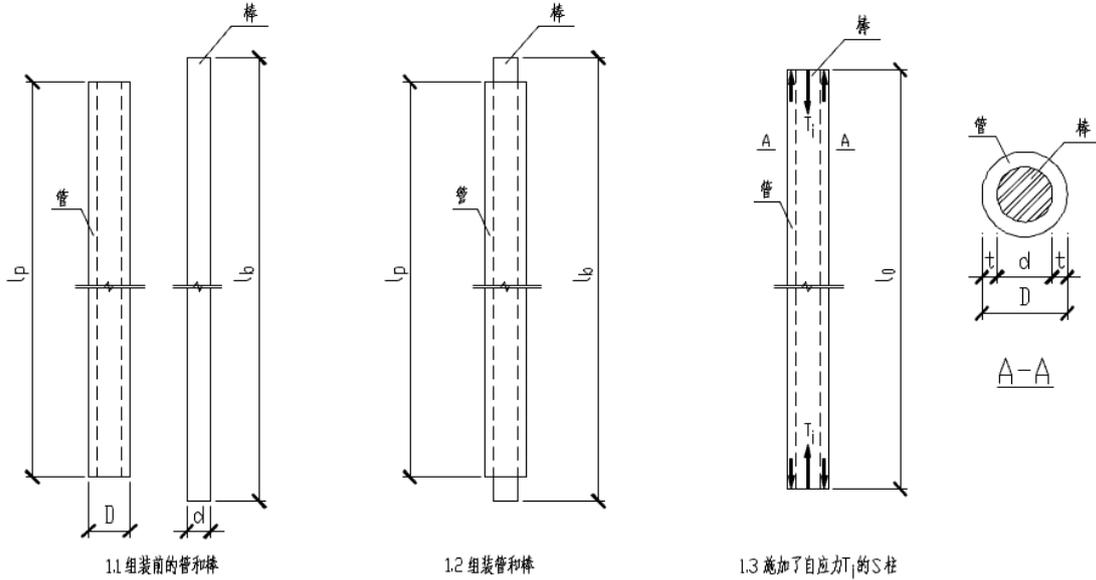


图 11 “S 柱”构造图 (Fig11 building up S-Column with self-prestressing T_i)

如图 11 所示，“S 柱”由管和棒装配而成。其中管和棒的初始长度分别为 l_p 和 l_b ，管的外径和棒的直径分别为 D 和 d ，棒的直径等于管的内径 ($d = D - 2t$)，“S 柱”的截面积 $A = A_p + A_b$ ，其中 A_p 和 A_b 分别为管和棒的截面积。弹性模量分别为 E_p 和 E_b ，惯性矩分别为 I_p 和 I_b 。抗拉刚度则分别为 $E_p A_p$ 和 $E_b A_b$ 。

则管与棒的抗拉刚度比 K_1 及抗拉线刚度比 K_2 分别为：

$$\begin{cases} K_1 = \frac{E_b A_b}{E_p A_p} & (2.1) \\ K_2 = \frac{E_b A_b}{E_p A_p} \frac{l_b}{l_p} & (2.2) \end{cases}, \text{ 给管施加初始预拉力 } T_i \text{ 同时}$$

给棒施加等值预压力，两者长度均改变为 l_0 后在端部相连，组成自应力平衡的受压构件“S 柱”。此后可用作承受外部压力的构件。

2.1.2 “S 柱”的基本假定

本文将分两阶段研究：第一阶段研究从 0 到 T_i 施加初始自平衡预应力的装配过程，此时“S 柱”尚未承受外压力；第二阶段研究从 0 到 N 给“S 柱”施加外压力的过程。在两阶段研究中我们做以下假定：

- (1) 组成“S 柱”的管和棒的材料均匀且在两阶段研究中均限定在线弹性范围内；
- (2) 管和棒的轴线均为理想直线，初始预应力 T_i 及施加的外压力 N 均与轴线重合；
- (3) “S 柱”一端为可动铰，另一端为固定铰，屈曲分析按小挠度理论考虑；
- (4) 管和棒之间的缝隙厚度为 0，两者在横向保持同步变形，轴向可各自独立伸缩。
- (5) 忽略管自身的抗弯刚度 $E_p I_p$ 对棒的约束作用。仅考虑管在预拉力 T_i 下的几何刚度 β_m 并假定它沿全长均匀。
- (6) 忽略自重影响。

本文推导过程中的变量均采用标量值，比如自应力 T_i ，无论是对管的预拉力还是对棒的预压力均为无正、负号的 T_i ，杆端转角及其函数值与杆件的屈曲方向无关时亦忽略符号。

2.2 第一阶段，“S 柱”装配过程的受力分析

2.2.1 “S 柱”装配过程的初步研究

从 0 到 T_i 施加初始预应力，管受拉，棒受压，两者大小相等方向相反。当 $T_i < P_{crb}$ （棒的欧拉临界力）时棒保持直线状态；当 $T_i = P_{crb}$ 时棒产生微弯，屈曲曲线的半波数 $m = 1$ ，同时管同步变形，此时管在拉力 T_i 下的几何刚度 β_m 将约束棒的侧挠，相当于在全长范围内给棒提供连续的侧向弹性支承；当 $T_i > P_{crb}$ 时，随着 T_i 的增加，侧挠 v 逐渐增大， β_m 也相应持续增加，它对棒的约束同步增强。屈曲曲线的半波数也将逐渐由 1 变为 2；继续增加 T_i 半波数将随之继续增加，直至管或棒达到屈服。

在第一阶段中，棒承受 2 个外力：预压力 T_i 和来自管的侧向约束力 $q(x) = y(x)\beta_m$ (3)。若忽略二阶效应，可以将棒的屈曲曲线 y 看成是压力 T_i 下的屈曲曲线 $y_1(x) = v_m \sin \frac{m\pi x}{l}$ (4) 和侧向约束力 $q(x)$ 下

的挠曲线 $y_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ (5) 的近似叠加 $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ ，即：

$$y(x) = v_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \text{ 其中 } m, n = \{1, 2, 3, 4 \dots\} \quad (6)$$

我们知道对于分布荷载作用下简支梁： $E_b I_b \frac{d^4 y_2}{dx^4} - q(x) = 0$ (7)，即： $\frac{q(x)}{E_b I_b} = \frac{d^4 y_2}{dx^4}$

将式 5 代入上式并展开可得：

$$\frac{q(x)}{E_b I_b} = \frac{d^4 y_2}{dx^4} = v_1 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \sin \frac{\pi x}{l} + v_2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 \sin \frac{2\pi x}{l} + v_3 \left(\frac{3\pi}{l}\right)^4 \sin \frac{3\pi x}{l} \dots + v_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \sin \frac{n\pi x}{l} \dots \quad (8)$$

将式 6 展开代入式 3，且等式两边同时除以 $E_b I_b$ ，可得：

$$\begin{aligned} \frac{q(x)}{E_b I_b} = & v_1 \frac{\beta_m}{E_b I_b} \sin \frac{\pi x}{l} + v_2 \frac{\beta_m}{E_b I_b} \sin \frac{2\pi x}{l} + v_3 \frac{\beta_m}{E_b I_b} \sin \frac{3\pi x}{l} \dots + \\ & \left(v_n \frac{\beta_m}{E_b I_b} \sin \frac{n\pi x}{l} + v_m \frac{\beta_m}{E_b I_b} \sin \frac{m\pi x}{l} \right) \dots \quad (9) \end{aligned}$$

式 9 中，等号右边括号内的子项称为特殊项，括号外的其它所有子项称为一般项。

三角函数组成的基在 L_2 空间中是完备正交基，函数 $\frac{q(x)}{E_b I_b}$ 平方可积，它的傅里叶展开是唯一的，也就是说式 8、9 两个级数式相等的充分必要条件是各子项一一对应相等，即一般项的系数一一对应相等，且特殊项相等。

将一般项的系数以数组表示：

$$\left\{ v_1 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4, v_2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4, v_3 \left(\frac{3\pi}{l}\right)^4, \dots \right\} = \left\{ v_1 \frac{\beta_m}{E_b I_b}, v_2 \frac{\beta_m}{E_b I_b}, v_3 \frac{\beta_m}{E_b I_b}, \dots \right\} \quad (10)$$

由 2.2.1 节基本假定 5 可知在屈曲曲线 $y(x)$ 确定时 β_m 为常数，故 $\frac{\beta_m}{E_b I_b}$ 不可能同时等于

$\left(\frac{\pi}{l}\right)^4, \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4, \left(\frac{3\pi}{l}\right)^4, \dots$ ，要满足式 10，各一般项系数 $v_1, v_2, v_3 \dots$ 中仅能有一个不为 0，记为 v_n ，

则式 5 应为： $y_2(x) = v_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ (11)

将式 4、11 代入 $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ 得到棒的屈曲曲线：

$$y(x) = v_m \sin \frac{m\pi x}{l} + v_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \text{ 其中 } m, n = \{1, 2, 3, 4 \dots\} \quad (12)$$

基于本文 2.1.1 节基本假定 4，管亦同时均遵循式 12，该式表明“S 柱”的实际曲线是两条正弦波的叠加。

2.2.2 结合式 12 对“S 柱”的更进一步研究

从 0 到 T_i 施加自平衡的初始预应力 T_i 。

当 $T_i < P_{crb}$ 时，棒保持直线状态；

当 $T_i \approx P_{crb}$ 时（见图 12），棒屈曲产生微弯 $y_1 = v_m \sin \frac{\pi x}{l}$ ，半波数 $m = 1$ ，同时管同步变形，此时管在

预拉力 T_i 下的几何刚度 β_m 将约束棒并给棒施加一个反向的曲线变形 $y_2 = v_n \sin \frac{\pi x}{l}$ ，半波数 $n = 1$ 。即

此时“S 柱”的变形曲线为正对称曲线 $y = (v_m + v_n) \sin \frac{\pi x}{l}$ ；

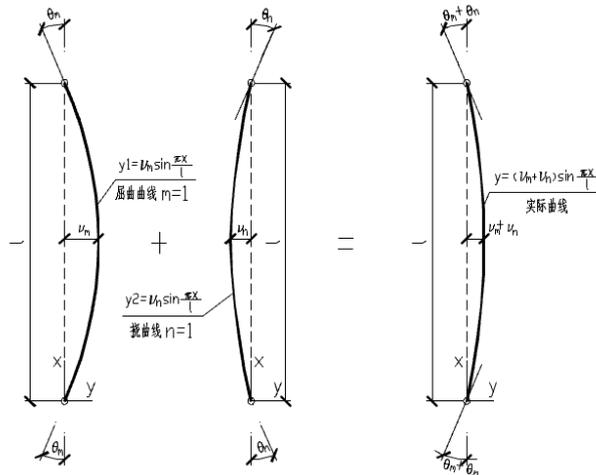


图 12 正对称屈曲 (Fig 12 symmetric buckling)

当 $P_{crb} < T_i < 4P_{crb}$ 时（见图 13），曲线 y_1 的侧挠值 v_m 随着 T_i 的增加而增大，管的几何刚度 β_m 也相应增加，它对棒的侧向约束同步增强，挠曲线 y_2 的半波数 n 将由 1 增加为 2。棒实际曲线 y 将由正对称转

变为非对称 $y = v_m \sin \frac{\pi x}{l} + v_n \sin \frac{2\pi x}{l}$ ；

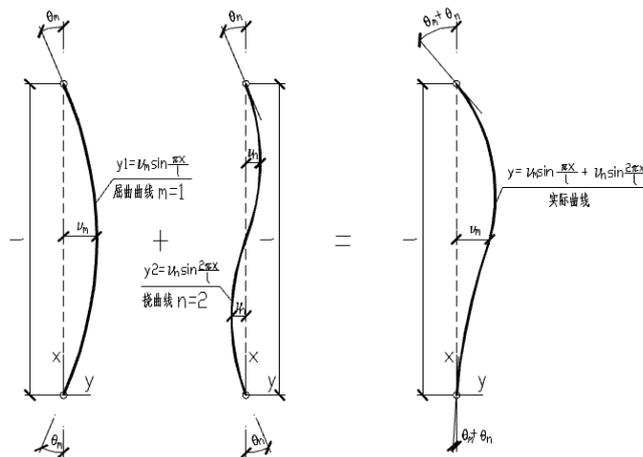


图 13 非对称屈曲 (Fig 13 interactive buckling)

当 $T_i \approx 4P_{crb}$ 时棒的曲线将转变为反对称（见图 14），即曲线 y_1 、 y_2 的半波数 m 、 n 均为 2，实际曲线

$y = (v_m + v_n) \sin \frac{2\pi x}{l}$ ；

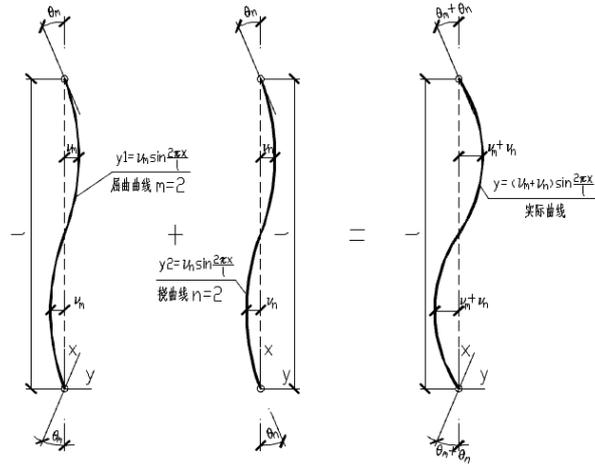


图 14 反对称屈曲 (Fig 14 antisymmetric buckling)

继续增加 T_i ，如此重复发展，半波数 m 总是“跟随” n 逐渐增加， $m = n - 1$ 或 $m = n$ ，直至管或棒达到屈服。

由上述讨论可知 T_i 的增加过程中，由于挠曲线对屈曲曲线的“跟随”，实际曲线的半波数在增加时，波形相对连续变化， β_m 也是相对连续变化的。后续研究中，我们以 $m = n$ 时刻作为作为推导关注点，则式 12 改变为： $y(x) = (v_m + v_n) \sin \frac{m\pi x}{l}$ 。由于推导“S 柱”受压临界力 N_{cr} 的过程与侧挠具体数值无关，我们可以将上式中的 $v_m + v_n$ 记为 v_m ，则在后续推导所研究的时刻，除特别注明外，“S 柱”的曲线公式为： $y(x) = v_m \sin \frac{m\pi x}{l}, m = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$ (13)

2.2.3 第一阶段管在预拉力 T_i 作用下的弹簧线刚度 β_m

当分别考察管和棒，忽略自重影响，根据胡克定律可知： $\begin{cases} l_p T_i = E_p A_p (l_0 - l_p) & (14.1) \\ l_b T_i = E_b A_b (l_b - l_0) & (14.2) \end{cases}$ ，将 K_1 代入可

得： $\begin{cases} K_1 l_p T_i = E_b A_b (l_0 - l_p) & (15.1) \\ l_b T_i = E_b A_b (l_b - l_0) & (15.2) \end{cases}$ ，两式相加 $T_i = E_b A_b \frac{l_b - l_p}{l_b + K_1 l_p}$ ，引入“自应力系数 C_1 ”：

$\begin{cases} C_1 = \frac{l_b - l_p}{l_b + K_1 l_p} & (16.1) \\ T_i = C_1 E_b A_b & (16.2) \end{cases}$ ，此时“S 柱”未承受外荷载处于初始自应力平衡状态。式 16 表明：当管和棒的

的初始长度 l_b 、 l_p 变化时，可以得到不同的初始预应力 T_i ，当 $l_b - l_p = 0$ 时 $T_i = 0$ ，随着 $l_b - l_p$ 值的增大，可使得 T_i 也相应增大。

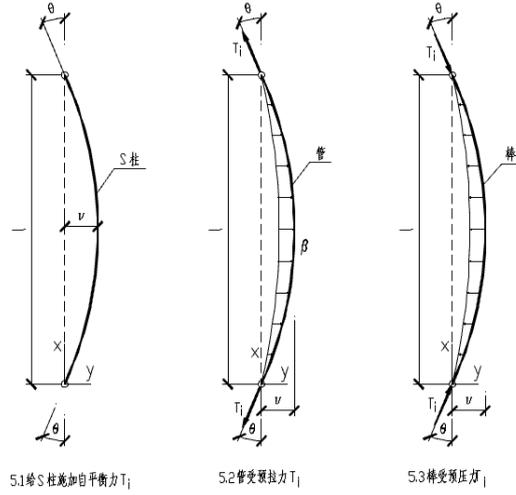


图 15 第一阶段受力分析 (Fig15 analysys of step one)

图 15 中忽略管的自身抗弯刚度，它在拉力 T_i 下为棒提供连续的侧向弹性支承。

根据基本假定 5，几何刚度 β_m 沿 l 全长均匀，“S 柱”屈曲曲线为式 13: $y(x) = v_m \sin \frac{m\pi x}{l}$ ，

$$m = \{1,2,3,4 \dots\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\pi v_m}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}$$

$$\text{对于杆端 } \tan \theta_m = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0 \text{ or } l} = \frac{m\pi v_m}{l}$$

可知各反弯点转角均同上式。

截取任意一个半波作为研究对象，由管的水平向静力平衡条件可列式：

$$\int_0^l \beta_m v_m \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 2T_i \sin \theta_m \quad (18)$$

$$\beta_m = \frac{m\pi T_i \sin \theta_m}{v_m l} = \frac{m^2 \pi^2 T_i \cos \theta_m}{l^2} \quad (19)$$

式 19 表明，对应于每一个确定的半波数 m ，在初始预应力 T_i 增加的过程中，几何刚度 β_m 线性增加。

2.2.4 第一阶段棒的稳定

以棒为研究对象，对应式 19 屈曲曲线的弯曲应变能为: $\Delta U_1 = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} m^4 v_m^2$ ，在棒的 dx 长度上所受的管的横向约束力为 $\beta_m y dx$ ，相应的应变能为 $\frac{\beta_m y^2}{2} dx$ ，对棒全长积分：

$$\Delta U_2 = \frac{\beta_m}{2} \int_0^l y^2 dx = \frac{\beta_m l}{4} v_m^2 = \frac{m^2 \pi^2 T_i \cos \theta_m}{4l} v_m^2$$

屈曲半波数为 m 时对应的临界力 P_{crbm} 对棒所做的功为: $\Delta W = \frac{P_{crbm} \pi^2}{4l} m^2 v_m^2$ ，代入 $\Delta W = \Delta U_1 + \Delta U_2$ ：

$$\frac{P_{crbm} \pi^2}{4l} m^2 v_m^2 = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} m^4 v_m^2 + \frac{m^2 \pi^2 T_i \cos \theta_m}{4l} v_m^2 \quad (20)$$

$$\text{即: } P_{crbm} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} m^2 + T_i \cos \theta_m$$

$$P_{crbm} = P_{crb} m^2 + T_i \cos \theta_m \quad (21)$$

$T_i \cos \theta_m \leq P_{crbm}$ 恒成立，所以在“S 柱”的装配阶段，给管和棒分别施加大小相等方向相反的自平衡

预应力 T_i ，在线弹性范围内，棒所受的压力总是小于它在管的约束下临界力，这说明在装配阶段“S柱”没有稳定问题。

2.3 “S柱”第二阶段的受力分析及临界力 N_{cr} 的理论推导

本阶段 T_i 是定值。由0增大到 N 施加外压力，“S柱”的长度由 l_0 压缩到 l （沿屈曲曲线的长度），管的拉力减小到 T_p ，棒的压力增加到 T_b 。外力 N 由管和棒各自分担，引入“外力分配系数” C_2 ，即 $C_2 \frac{N}{\cos \theta}$ 为管中分配到的力，则 $(1 - C_2) \frac{N}{\cos \theta}$ 为棒中分配到的力。由静力平衡及胡克定律可知

$$\begin{cases} T_p = T_i - C_2 \frac{N}{\cos \theta} = E_p A_p \frac{l - l_p}{l_p} & (22.1) \\ T_b = T_i + (1 - C_2) \frac{N}{\cos \theta} = E_b A_b \frac{l_b - l}{l_b} & (22.2) \end{cases} \quad \text{式22 两式相减:}$$

$$\frac{N}{\cos \theta} = E_b A_b \frac{l_b - l}{l_b} - E_p A_p \frac{l - l_p}{l_p} = E_b A_b + E_p A_p - \left(\frac{E_b A_b}{l_b} + \frac{E_p A_p}{l_p} \right) l, \quad \text{即: } l = \frac{E_b A_b + E_p A_p \frac{N}{\cos \theta}}{\frac{E_b A_b}{l_b} + \frac{E_p A_p}{l_p}}$$

式22 两式相加: $2T_i + \frac{N}{\cos \theta} - 2C_2 \frac{N}{\cos \theta} = E_b A_b - E_p A_p + \left(\frac{E_p A_p}{l_p} - \frac{E_b A_b}{l_b} \right) l$ ，将 l 和 T_i 代入上式:

$$2E_b A_b \frac{l_b - l_p}{l_b + kK_1} + \frac{N}{\cos \theta} - 2C_2 \frac{N}{\cos \theta} = E_b A_b - E_p A_p + \left(\frac{E_p A_p}{l_p} - \frac{E_b A_b}{l_b} \right) \frac{E_b A_b + E_p A_p - \frac{N}{\cos \theta}}{\frac{E_b A_b}{l_b} + \frac{E_p A_p}{l_p}}$$

$$\text{即: } 2C_2 \frac{N}{\cos \theta} = 2E_b A_b \frac{l_b - l_p}{l_b + l_p K_1} + \frac{N}{\cos \theta} - E_b A_b + E_p A_p - \left(\frac{E_p A_p}{l_p} - \frac{E_b A_b}{l_b} \right) \frac{E_b A_b + E_p A_p - \frac{N}{\cos \theta}}{\frac{E_b A_b}{l_b} + \frac{E_p A_p}{l_p}}$$

$$\text{简化得: } 2C_2 \frac{N}{\cos \theta} = \frac{2l_b \frac{N}{\cos \theta}}{l_b + K_1 l_p}$$

$$\text{即: } C_2 = \frac{l_b}{l_b + \frac{E_b A_b}{E_p A_p} l_p} = \frac{l_b}{l_b + K_1 l_p} = \frac{1}{1 + K_2} \quad (23)$$

$$\text{代回式22 则} \begin{cases} T_p = T_i - \frac{1}{1 + K_2} \cdot \frac{N}{\cos \theta} & (24.1) \\ T_b = T_i + \frac{K_2}{1 + K_2} \cdot \frac{N}{\cos \theta} & (24.2) \\ T_p = T_b - \frac{N}{\cos \theta} & (24.3) \end{cases}$$

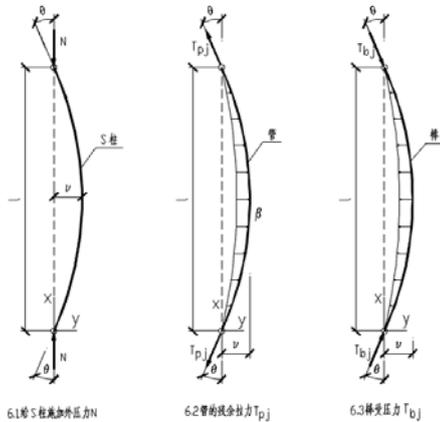


图16 单半波屈曲模式 (Fig16 Model1)

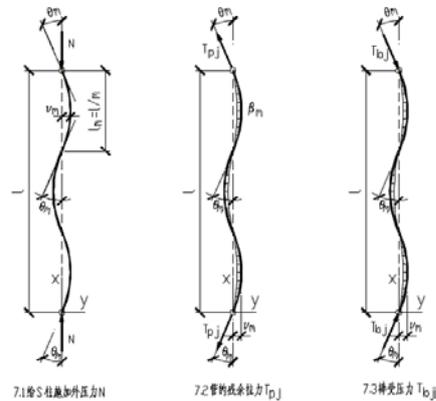


图17 多半波屈曲模式 (Fig17 high mode)

2.3.1 第二阶段管在拉力 T_p 下的弹簧线刚度 β_m

图 16、17 中忽略管的自身抗弯刚度，它在拉力 T_b 下为棒提供连续的侧向弹性支承。

根据基本假定 5，几何刚度 β_m 沿全长 l 均匀，“S 柱”屈曲曲线为式 13: $y(x) = v_m \sin \frac{m\pi x}{l}$ ， $m = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\pi v_m}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}$$

$$\text{对于杆端 } \tan \theta_m = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0 \text{ or } l} = \frac{m\pi v_m}{l}$$

可知各反弯点转角同上式。

以任意一个半波作为研究对象，由管的静力平衡条件由管的静力平衡条件

$$\int_0^l \beta_m v_m \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 2T_p \sin \theta_m$$

$$\text{得 } \beta_m = \frac{m\pi T_p \sin \theta_m}{v_m l} = \frac{\pi^2 T_p \cos \theta_m}{l^2}, \text{ 结合式 24.2、24.3 可得: } \begin{cases} \beta_m = \frac{m^2 \pi^2 (T_i \cos \theta_m - \frac{1}{1+K_2} N)}{l^2} & (25.1) \\ \beta_m = \frac{m^2 \pi^2 (T_b \cos \theta_m - N)}{l^2} & (25.2) \end{cases}$$

式 25.1 表明，对应于每一个确定的半波数 m ，在外压力 N 增加的过程中，几何刚度 β_m 线性减小，直到 β_m 减小到不足以维持既有的屈曲曲线性状，则半波数从 m 降到 $m-1$ 。

2.3.2 第二阶段棒的屈曲半波数 m

以棒为研究对象，图 7 中比照第一阶段能量法推得的公式 21 可推出：

$$T_b \cos \theta_m = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(m^2 + \frac{\beta_m l^4}{m^2 \pi^4 EI} \right) = P_{crb} \left(m^2 + \frac{\beta_m l^4}{m^2 \pi^4 EI} \right) \quad (26)$$

$$\text{代入式 24.2 得: } T_i \cos \theta_m + \frac{K_2}{1+K_2} N = P_{crb} \left(m^2 + \frac{\beta_m l^4}{m^2 \pi^4 EI} \right)$$

由上一小节知道，随着外压力 N 持续增加，屈曲半波数从 m 降到 $m-1$ ，在此改变的瞬间， $m^2 + \frac{\beta_m l^4}{m^2 \pi^4 EI} = (m-1)^2 + \frac{\beta_{m-1} l^4}{(m-1)^2 \pi^4 EI}$ ，亦可知此时 $\beta_m = \beta_{m-1}$ 故： $m^2 + \frac{\beta_m l^4}{m^2 \pi^4 EI} = (m-1)^2 + \frac{\beta_m l^4}{(m-1)^2 \pi^4 EI}$

$$m^2(m-1)^2 = \frac{\beta_m l^4}{\pi^4 EI} \quad (27)$$

$$\text{将式 25 代入式 27 可得 } \begin{cases} m^2(m-1)^2 = \frac{m^2 \pi^2 (T_i \cos \theta_m - \frac{1}{1+K_2} N)}{l^2} \cdot \frac{l^4}{\pi^4 EI} \\ m^2(m-1)^2 = \frac{m^2 \pi^2 (T_b \cos \theta_m - N)}{l^2} \cdot \frac{l^4}{\pi^4 EI} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} m = \sqrt{\frac{T_i \cos \theta_m - \frac{1}{1+K_2} N}{P_{cr1}}} + 1 & (28.1) \\ m = \sqrt{\frac{T_b \cos \theta_m - N}{P_{cr1}}} + 1 & (28.2) \end{cases}$$

式 28.1 表明：在 T_i 确定时，随着外压力 N 增加，“S 柱”屈曲曲线的半波数 m 逐渐降低。

2.3.3 “S 柱”临界承载力 N_{cr} 、最优初始预应力 T_i

$$\text{将式 27 代入 26 可得 } \frac{T_b \cos \theta_m}{P_{crb}} = m^2 + (m-1)^2 \quad (29)$$

$$\text{将式 28 代入式 29 消去 } m, \text{ 并结合式 24.2 可得: } \begin{cases} \sqrt{T_i \cos \theta_m - \frac{1}{1+K_2} N} - \sqrt{N} = \sqrt{P_{crb}} & (30.1) \\ \sqrt{T_b \cos \theta_m - N} - \sqrt{N} = \sqrt{P_{crb}} & (30.2) \end{cases}$$

显化函数可得：

$$\begin{cases} N = \frac{1+K_2}{2+K_2} T_i \cos \theta_m - \frac{2 \sqrt{\frac{2+K_2}{1+K_2} T_i P_{crb} - \frac{1}{1+K_2} P_{crb}^2} - \frac{K_2}{1+K_2} P_{crb}}{\left(\frac{2+K_2}{1+K_2}\right)^2} & (31.1) \\ N = \frac{1}{2} T_b \cos \theta_m - \sqrt{\frac{1}{2} T_b \cos \theta_m P_{crb} - \frac{1}{4} P_{crb}^2} & (31.2) \end{cases}$$

给“S柱”施加外压力，管内力减小，棒内力增加，以棒屈服作为控制条件，即 $T_{bj} = A_b f_y$ 。

带入式 31.2 可得：
$$N = \frac{1}{2} A_b f_y \cos \theta_m - \sqrt{\frac{1}{2} A_b f_y \cos \theta_m P_{crb} - \frac{1}{4} P_{crb}^2} \quad (32)$$

由式 32.1 可绘制 $N - \theta_m$ 曲线：

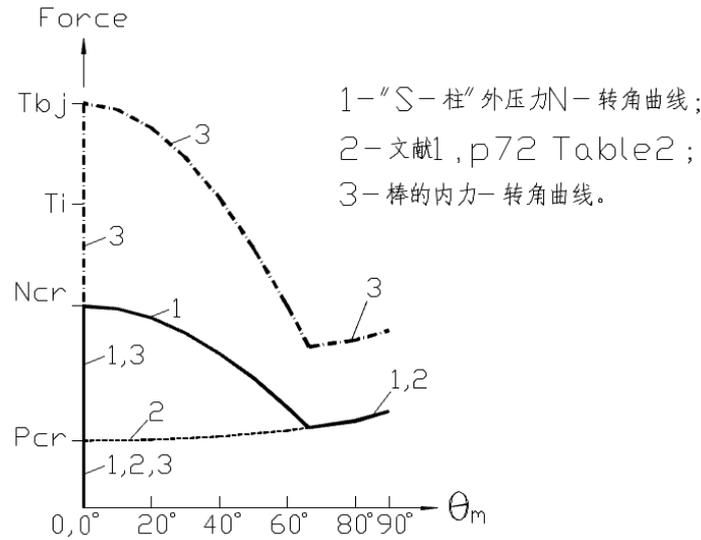


图 18 “S柱”外压力及初始预应力与杆端转角关系 (Fig18. $N - \theta_m$)

由于超大长细比下 P_{crb} 和 N_{cr} 相比较小，且 $\cos \theta_m \leq 1$ ，故“S柱”受压临界承载力：

$$\begin{cases} N_{cr} = \frac{1+K_2}{2+K_2} T_i - \frac{2 \sqrt{\frac{2+K_2}{1+K_2} T_i P_{crb} - \frac{1}{1+K_2} P_{crb}^2} - \frac{K_2}{1+K_2} P_{crb}}{\left(\frac{2+K_2}{1+K_2}\right)^2} & (33.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{cr} = \frac{1}{2} A_b f_y - \sqrt{\frac{1}{2} A_b f_y P_{crb} - \frac{1}{4} P_{crb}^2} & (33.2) \end{cases}$$

由前述讨论并引入上标 opt 表示最优，式 24 可改写为：

$$\begin{cases} T_{pj} = T_i^{opt} - \frac{1}{1+K_2} \cdot N_{cr} & (34.1) \\ T_{bj} = T_i^{opt} + \frac{K_2}{1+K_2} \cdot N_{cr} & (34.2) \\ T_{pj} = T_i^{opt} - N_{cr} & (34.3) \end{cases}$$

式中 T_{pj} 和 T_{bj} 分别是“S柱”处于受压临界状态时，管和棒的内力。

将式 33.2 和 $T_{bj} = A_b f_y$ 代入 34.2
$$A_b f_y = T_i^{opt} + \frac{K_2}{1+K_2} \cdot \left(\frac{1}{2} A_b f_y - \sqrt{\frac{1}{2} A_b f_y P_{crb} - \frac{1}{4} P_{crb}^2} \right)$$

即“S柱”最优初始预应力：
$$T_i^{opt} = A_b f_y - \frac{K_2}{1+K_2} \cdot \left(\frac{1}{2} A_b f_y - \sqrt{\frac{1}{2} A_b f_y P_{crb} - \frac{1}{4} P_{crb}^2} \right) \quad (35)$$

式 33、35 须满足：
$$T_i^{opt} \leq A_p f_y \quad (36)$$
 即在施加初始预应力阶段，管不能屈服。

根据式 33.2、35，取 $D=20\text{mm}$, $E=206000 \text{ N/mm}^2$, $f_y=235\text{N/mm}^2$, $\lambda=330$, 取不同的棒的直径 d , 得表格 1:

表 1. $N_{cr}-d$ 关系 (Table1. $N_{cr}-d$)

d	K_2	P_{crb}	T_i^{opt}	N_{cr}	P_{cr}	A_{pfy}	N_{cr}/T_i^{opt}
mm	/	kN	kN	kN	kN	kN	/
12.1	0.58	0.80	23.38	10.33	5.86	46.60	0.44
13.1	0.76	1.09	26.76	11.79	5.86	41.94	0.44
14.1	1.00	1.46	30.24	13.30	5.86	36.91	0.44
14.3	1.06	1.55	30.94	13.60	5.86	35.86	0.44
14.9	1.24	1.80	32.89	14.45	5.86	32.89	0.44
14.9	1.26	1.82	33.07	14.53	5.86	32.61	0.44

由表 1 可知，随着棒的直径增加，受压临界力相应增加，但须避免管屈服（比如最后一行）。

取 $D=20\text{mm}$, $E=206000 \text{ N/mm}^2$, $f_y=235\text{N/mm}^2$, $d=0.7D$ 即管棒等面积，取不同长细比，根据式 33.2、35 得表格 2:

表 2. $N_{cr}-\lambda$ 关系 $d=0.7D$ (Table2. $N_{cr}-\lambda$)

λ	$L0$	K_2	P_{crb}	T_i^{opt}	N_{cr}	P_{cr}	A_{pfy}	N_{cr}/T_i^{opt}
mm	mm	/	kN	kN	kN	kN	kN	/
200	1000	1.00	3.98	31.83	10.11	15.94	36.91	0.32
265	1325	1.00	2.27	30.85	12.07	9.08	36.91	0.39
330	1650	1.00	1.46	30.24	13.30	5.86	36.91	0.44
395	1975	1.00	1.02	29.82	14.13	4.09	36.91	0.47
460	2300	1.00	0.75	29.52	14.73	3.01	36.91	0.50
505	2525	1.00	0.62	29.36	15.06	2.50	36.91	0.51

由表 2 及式 33.2 可知, P_{crb} 随长细比增加减小, 最终 N_{cr} 接近 $\frac{1}{2}A_b f_y$, 当管棒面积相同时, N_{cr} 接近 $\frac{1}{4}A_{pfy}$ 。

取 $D=20\text{mm}$, $E=206000 \text{ N/mm}^2$, 钢材采用 Strenx1100, $f_y=1100\text{N/mm}^2$, $d=0.7D$ 即管棒面积相等, 取不同长细比, 根据式 33.2、35 可绘制图 19:

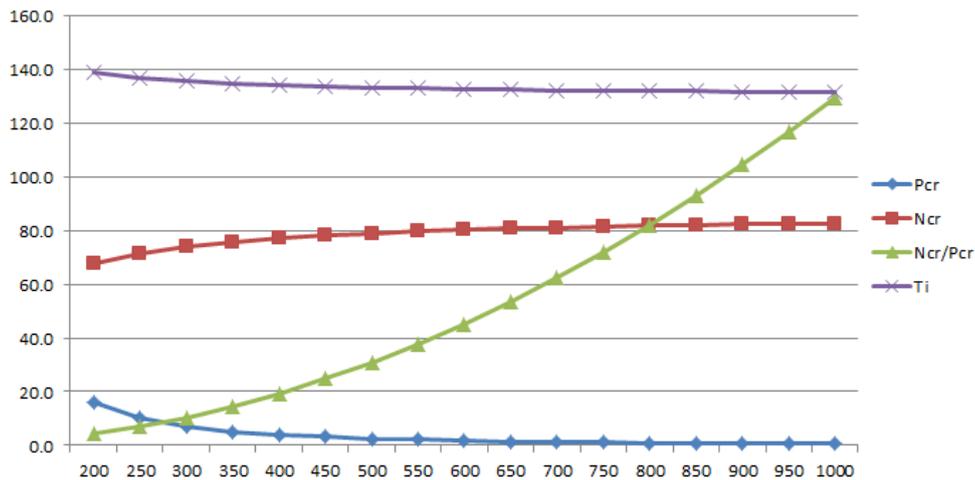


图 19 “S 柱” 临界力与长细比关系 (Fig19. $N_{cr}-\lambda$)

上图中横轴为长细比 λ , 纵轴为力 T_i 、 N_{cr} 、 P_{cr} 或力的比值 N_{cr}/P_{cr} , 单位 kN 或无单位。使用高强材料 Strenx1100 后, 和表 2 对比, 临界力明显大幅提高, 外径 20mm 的 “S 柱” 临界力超过了 80kN。且可见随着长细比的增大, N_{cr}/P_{cr} 增加较快, 当 $\lambda = 1000$ 时, N_{cr}/P_{cr} 超过 120 倍。

2.3.4 “S 柱” $N < N_{cr}$ 时应力 δ -应变 ϵ 关系

工程应用中需要知道 $\delta - \epsilon$ 关系才能将 “S 柱” 建入整体有限元模型。这里暂仅研究管棒材料及横截面

积均相等的情况。由 2.1.1 节基本假定可知管和棒均处于线弹性状态，由胡克定律可知

$$\begin{cases} T_i = E_p A_p \frac{l_0 - l_p}{l_p} & (39.1) \\ T_i = E_b A_b \frac{l_b - l_0}{l_b} & (39.2) \end{cases}$$

，两式相除得 $l_0 = \frac{2l_b l_p}{l_b + l_p}$ (40)，将式 24.1 代入式 22.1 可得 $T_i - \frac{1}{1+K_2} N =$

$$E_p A_p \frac{l - l_p}{l_p} \quad (41)$$

，将式 16.1、39.1 代入式 41 整理可得 $N = E_p A_p \frac{l_0 - l}{l_b + l_p}$ ，将式 40 代入得 $N = 2E_p A_p \frac{l_0 - l}{l_0} =$

$$EA \frac{l_0 - l}{l_0} = EA \varepsilon$$

，即 $\delta = E\varepsilon$ (42)，式 42 表明 $N < N_{cr}$ 时“S 柱”保持线弹性。

2.3.5 环境温度改变对“S 柱”临界承载力的影响

当管和棒采用相同的材料时，具有相同的线膨胀系数，两者的纵向和径向的变形率相同，环境温度的改变不会带来附加内力，亦不影响“S 柱”的临界承载力 N_{cr} 。

以上各节推导及分析过程中研究了管受拉、棒受压的情况，基于基本假定 5 忽略拉杆的抗弯刚度的约束作用，则当管受压、棒受拉时，本文推导和分析结果亦同样成立。

2.4 试验验证

2.4.1 试件的制作

本文 2.1 节“S 柱”的构造方法中，棒的直径 d 等于管的内径 $(D-2t)$ 。基于易于装配的理由，本试验试件制作时， d 略小于管的内径。管规格 $\phi 20 \times 3$ ，两端各焊接一个 M24 长螺母。棒规格 $\phi 13$ ，布置于管内，留有 0.5mm 缝隙。两者材质均为 Q235。“S 柱”参数： $E = 206000 \text{ N/mm}^2$ ， $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$ ， $\lambda = 330$ ， $A = 314\text{mm}^2$ 。

通过拧紧 M24 螺栓给棒施加预压力 20kN，管同时受等值预拉力。见图 20、21。

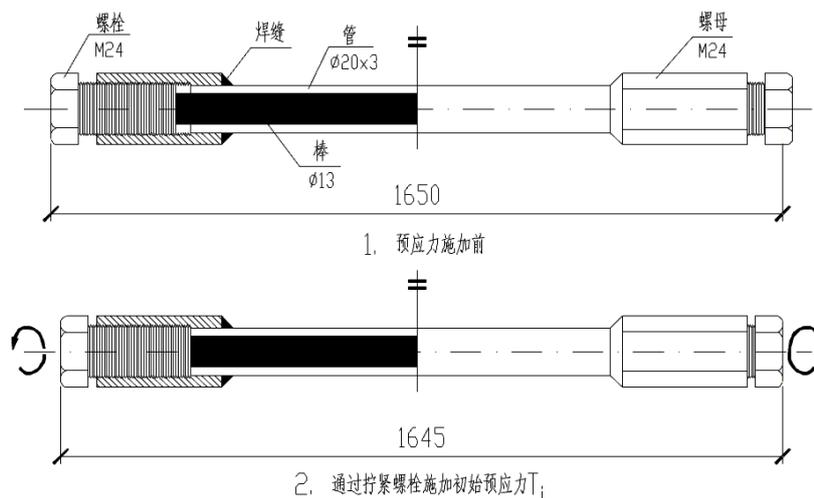


图 20 试件加工图 (Fig20 Detailing of specimens)



图 21 实验后的试件照片 (Fig21 photo of specimens after test)

2.4.2 加压试验

5 根试件在工厂制作组装时, 通过拧紧螺栓施加预应力, 其中一根刻意超拧到预应力超过屈服力, 试件出现视觉可见的多个显著蛇形波, 验证了本文 2.2 节的组装阶段随着预应力加大构件半波数 m 增大的分析与判断。2016 年 1 月 25 日在上海交通大学实验室对剩余 4 根试件加压试验。



图 22 实验加压 (Fig22 compressing test)

实验时, 试件杆端螺栓头顶面与压力机加压面直接接触, 逐渐增加压力, 达到最大压力后试件屈曲, 继续加压, 压力机读数下降, 最终在中点侧挠约 15cm 时压力读数稳定 5kN 附近。结果如下:

表 3 实验与欧拉临界力及“S 柱”理论承载力对比 (Table3 results of test)

试件 编号	“S 柱”的规格	长度 l (m)	欧拉临界力		初始预应力 T_i (kN)	试验最大压力 N_{cr} (kN)
			P_{cr} (kN)			
			管+棒	棒		
1	$\Phi 20$ ($\Phi 20 \times 3 + \Phi 13$)	1.645	5.72	1.05	20	15.0
2	$\Phi 20$ ($\Phi 20 \times 3 + \Phi 13$)	1.645	5.72	1.05	20	14.0
3	$\Phi 20$ ($\Phi 20 \times 3 + \Phi 13$)	1.645	5.72	1.05	20	14.5
4	$\Phi 20$ ($\Phi 20 \times 3 + \Phi 13$)	1.645	5.72	1.05	20	14.5

由上表可知, 实验最大压力远超过欧拉临界力 5.72kN。

实验获得的最大压力同时也均超过了公式 33.2 的理论值, 分析其原因应为: 1, 公式推导中忽略了外管抗弯刚度贡献的因素; 2, 试件杆端螺栓头与压力机为平面接触, 不是理想球铰, 试件屈曲时的加压点偏心产生的附加弯矩会造成实验读数值的偏高; 3, 端部的连接螺母比试件本身截面大。

3 结论

3.1 由理论推导及实验结果可知, 相同外形、材质、边界条件的“S 柱”与欧拉柱相比, 受压临界承载力可以大幅提高 $N_{cr} \gg P_{crb}$, 临界力与材料强度正相关。选用高屈服强度的材料可直接提高临界承载力。

3.2 最优初始预应力 $T_i^{opt} = A_b f_y - \frac{K_2}{1+K_2} \cdot \left(\frac{1}{2} A_b f_y - \sqrt{\frac{1}{2} A_b f_y P_{crb} - \frac{1}{4} P_{crb}^2} \right)$,

受压临界力 $N_{cr} = \frac{1}{2} A_b f_y - \sqrt{\frac{1}{2} A_b f_y P_{crb} - \frac{1}{4} P_{crb}^2}$ 。且受压承载力 N_{cr} 与初始预应力 T_i 正相关。

3.3 当 $N < N_{cr}$ 时“S 柱”保持线弹性, 可直接建入有限元整体模型进行结构分析。

3.4 管和棒采用相同的材料时, 环境温度的改变不影响“S 柱”的临界承载力 N_{cr} 。

4 工程应用

在 2016 年 10 月 20 日竣工的南京石塘互联网会议中心项目中采用了 32 根“S 柱”，方管截面 120mm，长度 9m-10.5m 不等。



图 23 工程实例，南京石塘互联网会议中心

5 下一步的研究

不同边界条件及外力下的“S 柱”的受力性能，比如端部刚接及柱身承受侧向力或承受杆端弯矩时；初始缺陷比如不同尺寸的缝隙等初始缺陷对承载力的不利影响；外管抗弯刚度对“S 柱”受压承载力的有利影响。

感谢：

Mott MacDonald 伦敦公司的张雷博士指出了本文初稿依据文献 1 中的弹性地基梁公式推导“S 柱”受压承载力时的局限，并对最终结论做了数值模拟对比，华侨大学罗漪博士指出了公式演算中的系数问题，同时两人也深入参与了终稿的完善过程；同济大学李国强老师的勉励及指导对本文起关键作用；范砥、高福聚博士对论文稿提供了详细具体的改进建议；MIT 结构组黄一江给了数学方面的帮助；本文由陈菲终校及全部图片绘制。

参考文献：

1. S.P.Timoshenko, Theory of Elastic Stability, 1st edition, New York and London, McGRAW-HILL, 1936
2. G. Magnal, Prestressed Concrete, 3rd edition, CLP, 1954
3. E.Belenya, Prestressed load-bearing metal structures. Moscow, Mir Publishers, 1977
4. ЦНИМСК МИСИ. Инструкция По Проектированию Предварительно Напряжённых Конструкции. Москва,1963
5. H. H. Hafez, Pretensioning of single-crossarm stayed columns. 1977
6. D. Saito & M. Wadee, Post-buckling behaviour of prestressed steel stayed columns, Engineering Structures, 2008
7. J. L. Yu, M. Wadee, NUMERICAL AND ANALYTICAL STUDIES OF PRESTRESSED STAYED COLUMNS WITH MULTIPLE CROSS-ARMS, 8th International Conference on ADVANCES IN STEEL STRUCTURES, Lisbon, Portugal, 2015
8. Atsushi Watanabe, etc, Properties of Brace encased in buckling-Restraining Concrete and Steel tube, 9th World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo, 1988
9. B. N. Sridhara and M. A. Ramaswamy, Sleeved Column as Compression Member, Unpublished Report, Bangalore, India, 1982
10. Badri K. Prasad, Experimental Investigation of sleeved column, AIAA-92-2534-C1, 1992