

**A new statically indeterminate structure under arbitrary temperature fields with no temperature stress when complex temperature changes**  
任意温度场复杂变温下的超静定结构的零温度应力形构

Xin Yuan 袁鑫

okok@okok.org

XinY structural consultants

袁鑫工程顾问（上海）事务所

**Summary**

When temperature deformation is constrained, temperature stress will be generated. This paper proposes a new form-finding method:  **$\Gamma$ -form**, which makes the temperature stress of the statically indeterminate structure always zero in linear analysis under any complex temperature field when complex temperature changes, and the nonlinear temperature stress is extremely low. According to this form-finding method, if additional supports are added arbitrarily, the temperature stress can always be almost ignored, and its structural system can reliably withstand other loads. At the same time, this study gives the zero temperature stress constant  $\gamma=0.42$ .

**摘要**

温度变形受到约束时将产生温度应力。本文提出一种形构方法： $\Gamma$ -形构，使得超静定结构在任意温度场复杂变温下，线性分析时的温度应力总为 0，非线性温度应力极低。按照本形构方法任意增加附加支座，温度应力总是可以几近忽略，且其结构体系能够可靠承受其它荷载。同时本文研究给出了零温度应力常数 $\gamma=0.42$ 。

**Keywords:**  $\Gamma$ -form, zero-temperature stress constant  $\gamma$ , temperature field, variable temperature, statically indeterminate structure

**关键字:**  $\Gamma$ -形构、零温度应力常数 $\gamma$ 、温度场、变温、超静定结构

## 一、前言

当温度变化引起的膨胀或收缩受到约束时，结构会产生温度应力。

在机械领域，比如航空发动机虽然几何尺寸较小（6M 以内）但工作阶段有较大的温差，比如 F22、F35 及 J20 的涡扇发动机最高温度超过或接近 2000°F，机壳或机舱的紧固约束下会产生可观的温度应力和应变。所以在发动机的设计中仅能将 1 个（或 1 组两个近邻的）滚珠轴承（也就是固定铰支座）设置于非高温区的情况下，固定铰支座承担很大的集中力，因此对其材料的强度、耐久性等要求非常高，高温区只能设置可滑动的滚棒轴承。

在土木工程领域，为抵抗风力、地震等，大型结构体通常有较强的超静定边界约束条件，当几何尺度较大时，比如石上纯也的白鹭湾文化中心长 888M（组合结构），云南抚仙湖植物馆直径 300M（混凝土结构），北京院的天眼直径 500M（钢结构）。它们在四季环境温差下可能会产生较大的温度应变。为解决温度应力问题，结构通常设计成静定结构或设置变形缝，前者有苛刻的使用条件，后者不仅导致部件数量增加、成本升高，而且变形缝处容易存在漏水以及影响外观等问题。

在建筑、机械、船舶、电力、航空航天等大尺度或大变温领域中，均存在这样的问题。

就分析原理而言温度分析和常规结构分析类似，但自身也有如下特点：

温度场的传递有通过标准给出或估计给出大致分布，也有通过温度分析将结果通过网格模型传递；

对于没有位移约束，或不存在过约束（静定）的单一材料结构，温度场引起变形但不产生应力，即通常说的自由热胀冷缩；

仅由温度分布不均匀 ( 温度场 ) 或变温不均产生的 ( 内 ) 温度应力 ;

不同材料热膨胀系数不同 , 温度变化产生的温度变形和 ( 内 ) 温度应力 ;

对于过约束 ( 超静定 ) 结构 , 由于强制边界的存在 , 温度场引起的应变通常转为 ( 外 ) 温度应力进而在强制边界上产生约束反力 ( 支座反力 ) 。

本文构造一种增加任意数量的额外约束后的超静定结构体系 , 其线性分析时温度应力总为 0 , 非线性温度应力极低的超静定结构体系 , 称为 **Γ-形构** 。

## 二、正文

本文先后研究单一材料的均匀变温和任意材料任意组合的复杂温度场变温两种情况 , 研究阶段一是二的特例 。

### 2.1 研究阶段一：单一材料的均匀变温

假定：A，内部无变形约束 ( 即表面及内部无温差 )；B，无相互变形约束 ( 即组成结构体系的构件、零件之热膨胀系数相同 )；C，均质 ( 即结构体系的材料各向同性 )；D，理想弹性 。

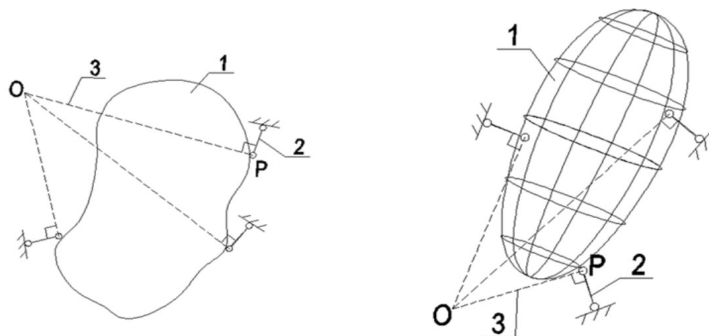


图 1 平面和空间结构体系的变温

图 1 中，结构体 1 上设置数目不限的多个（图中仅示出 3 个）支座链杆 2，所述链杆均垂直于各自对应的控制直线 3，任一链杆对应的控制直线通过该链杆与结构体的连接支点  $P$ ，且与其它所有链杆对应的各控制直线全部汇交于一点  $O$ 。

如此布置，无论结构体的尺度大小也无论它的温度变化多少，线性分析时即使是超静定结构体系的温度应力仍均为 0，且可以正常承受其它荷载。

需要说明的是， $O$  点的选择可以是任意的。先选择不同的  $O$  点再选择各支点  $P$  的位置进而通过与直线  $OP$  垂直确定链杆的方向有工程上的优化意义，但不是理论上的必须。

当  $O$  点位于结构体（或所有支点  $P$ ）的外接球球心时，相同变温产生的最大位移值（或支点最大位移值）最小。

## 2.2 研究阶段二：任意材料任意组合的复杂温度场变温

研究阶段二从 2.1 中的单一材料均匀变温的特殊情况，推广到任意材料任意组合的复杂温度场任意变温的一般情况，即 2.1 中的所有假定均取消。

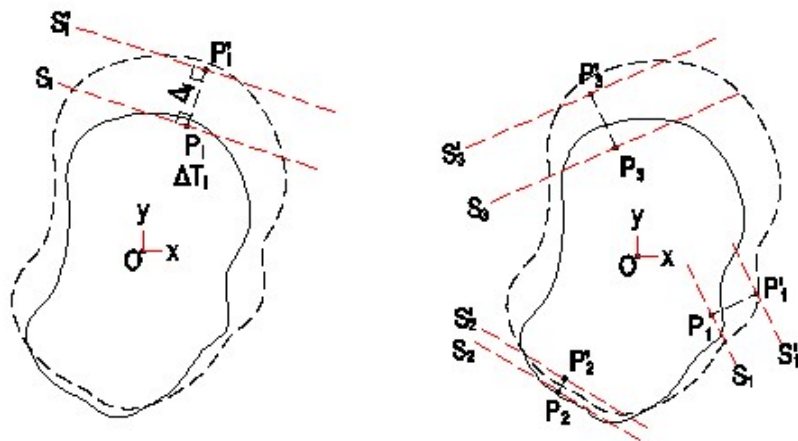


图 3 定义与符号

本研究阶段的关键定义与符号 ( 图 3 ):

变温--物体从一个温度场改变为另一个温度场

温变--物体上的某一点的温度升高或降低

二力杆支座--一端与物体铰接另一端为固定铰支座的线弹性杆件，其轴向线刚度较大近乎链杆支座

内温度应力--在未受到外约束情况下，因物体内部各点的温变不同或组成物体的材料的不同产生的温度应力

外温度应力--物体因温度变形受到外部支座约束而产生的附加温度应力

$P_i(x_i, y_i, z_i)$  ,  $P'_i(x'_i, y'_i, z'_i)$ -- 物体上任意一点的温变前后的位置

$S_i, S'_i$  --分别过点  $P_i$  和  $P'_i$  的垂直于线段  $P_iP'_i$  的两个平面

中面--垂直于线段  $P_iP'_i$  且通过其中点的平面

当一个物体的材料构成及几何形状确定，通过数理分析方法总可以计算得到变温工况下物体上任意点的温度变形 $\Delta$ ，即  $P_i$  最终变形到  $P'_i$ 。

$S_i$  和  $S'_i$  是分别过点  $P_i$  和  $P'_i$  的两个垂直与线段  $P_iP'_i$  的平面。

变温下物体的温度应力可分为两部分，一部分是在未受到外约束情况下，因内部各点及表面个点的温度的变化不同或组成物体的材料的不同产生的内温度应力。另一部分是物体因温度变形受到外部约束而产生的附加温度应力 ( 外温度应力 )。本阶段仅研究后者的影响，通过合理设置二力杆支座使得线性分析时超静定结构体系的外温度应力仍为 0，高阶分析时最低。

后文中的温度应力均指外温度应力。

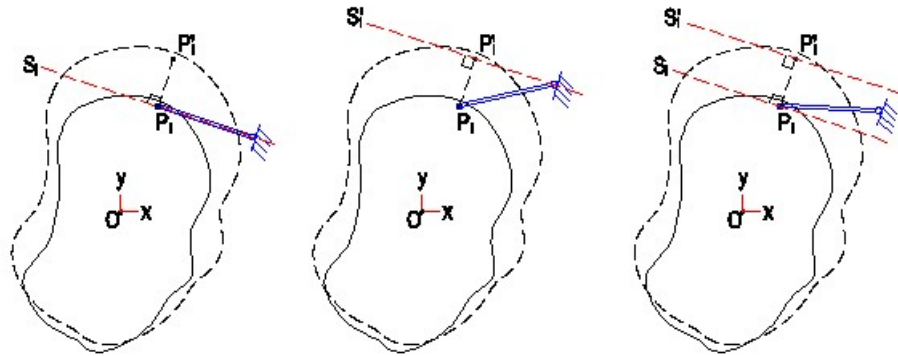


图 4 有效降低温度应力的支座设置区域

设 $\Delta$ 为线段  $P_i P_i'$  的长度， $a$  为二力杆在线段  $P_i P_i'$  上的投影长度。如图 4 所示，有 3 种有效降低温度应力的支座设置区域：

A，支座位于平面  $S_i$  上，也就是  $a/\Delta=0$

由于二力杆与变形方向垂直，线弹性分析时二力杆内力为 0，不会因该支座的增设产生温度应力。物体变形后该垂直不再保持，非线性分析（ $P-\Delta$  或大变形分析）时，会产生温度应力。

在变形过程中支座对物体的约束力逐渐加大。

B，支座位于平面  $S_i'$  上，也就是  $a/\Delta=1$

由于最终变形后二力杆与变形方向垂直，由最低能量原理可知它的内力由高到低变为 0，最终不会产生温度应力。在变形过程中支座对物体的约束力逐渐减小为 0。

C，二力杆支座位于两个平面  $S_i$  和  $S_i'$  之间，也就是  $0 < a/\Delta < 1$

上述 3 个区域的并集，也就是分别过点  $P_i$  和  $P_i'$  且垂直线段于  $P_i P_i'$  的两个平面  $S_i$  和  $S_i'$  围合的连续空间 ( $0 \leq a/\Delta \leq 1$ ) 是布置二力杆支座的合理几何区域。直观推测，当二力杆支座位于中面 ( $a/\Delta=0.5$ ) 时，变温变形全过程中的温度应力的幅值最小。后文的继续研究表明直观的错误，实际上当  $a/\Delta=0.42$  及其邻近区域时温度应力幅值最低，我们将它

命名为零温度应力常数 $\gamma=0.42$ 。

由于  $P_i$  点是物体上的任意一点，遵循上述方法可以根据需要在物体上的任意不同点上布置多个二力杆支座，使得它们与物体一起组成的结构体在能承受外荷载的前提下，温度应力幅值为 **0** 或最小。

在工程应用中为了整体最优可能需要在温度应力幅值这个单一目标最优（最小）上妥协，合理空间的临近区域有时也会是更合适的选择。

一点补充：由于增设二力杆支座的影响，从点  $P_i$  到  $P_i'$  的变形路径会有微弱偏差，当结构的几何尺度较大或温度变化较大时这种偏差可能不应被忽略，需要用迭代的方式获得并修正最终的变形点  $P_i'$ 。

我们将遵循上述 2.1、2.2 小节中的程序的构造方法命名为  **$\Gamma$ -形构**。

### 2.3 力学推导，阶段二的数理研究

静定结构没有温度应力。

我们已经知道  **$\Gamma$ -形构**虽然是超静定结构体系，在线性分析时也没有温度应力。对于非线性分析，本小节通过考察新增二力杆支座的应力幅值规律，定量获得最优（温度应力最小）的支座布置方法。

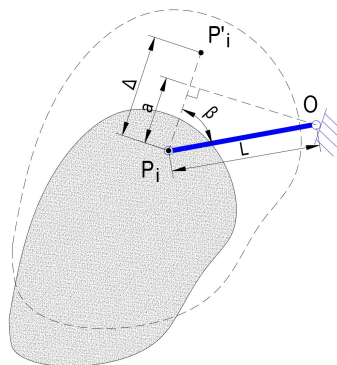


图 5 新增支座布置的几何关系

由后文静力及几何分析可知，图 5 中当  $\beta$  同时满足式 1、2 时，温度应

力可达到最小极值：

$$\cos\beta - \sin\beta \leq \frac{\Delta}{L} \leq \cos\beta + \sin\beta \quad (1)$$

$$2.2 * \cos\beta \leq \frac{\Delta}{L} \leq 2.5 * \cos\beta \quad (2)$$

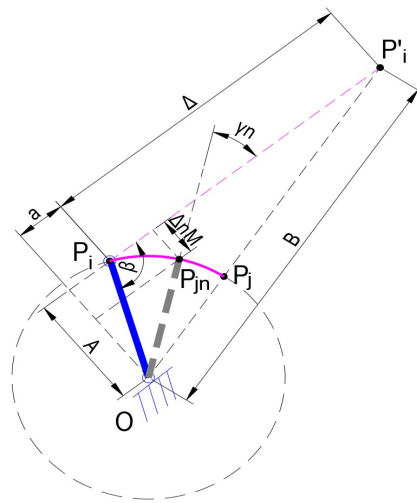


图 6 考虑新增支座物理影响的几何关系

图 6 中，在原有物体/结构上新增一个二力杆支座  $OP_i$ ，变温开始后，由于新增支座的影响， $P_i$  点将偏离原  $P_iP_i'$  变形路径，现设定：

二力杆轴向线刚度近乎链杆，其轴向变形极小且可忽略；

二力杆在  $P_iP_i'$  上的投影长度为  $a$ ，即  $a=L*\cos\beta$ ；

$P_iP_j$  为新变形路径， $P_{jn}$  为新变形路径上对应状态  $n$  时的点；

线段  $OP_{jn}$  与线段  $P_iP_i'$  夹角为  $\gamma_n$

$\Delta_{nP}$ 、 $\Delta_{nM}$  分别为状态  $n$  下，原物体在轴向和法向的变形量；

$E_{nP}$ 、 $E_{nM}$  分别为状态  $n$  下，原物体的轴向刚度和抗弯刚度；

$F_n$  为状态  $n$  时二力杆轴力； $F_{nP}$ 、 $F_{nM}$  分别为二力杆在状态  $n$  时因原物体产生轴向变形和抗弯变形时产生的轴力分量；

则有



$$Fn = \frac{FnM}{\sin\gamma_n} = \frac{\Delta nM * EnM}{\sin\gamma_n} \quad (3)$$

$\Delta nM$  可由几何算法求得，即

$$\Delta nM = A - L * \sin\gamma_n \quad (4)$$

$$\sin\beta \leq \sin\gamma_n \leq A/B$$

其中  $A = L * \sin\beta$  ,  $B = \sqrt{A^2 + (\Delta - a)^2}$

原物体属性、温变 $\Delta T$  及二力杆长度  $L$  保持恒定，进行非线性分析，可得到二力杆在新变形路径中内力变化情况如图 7：

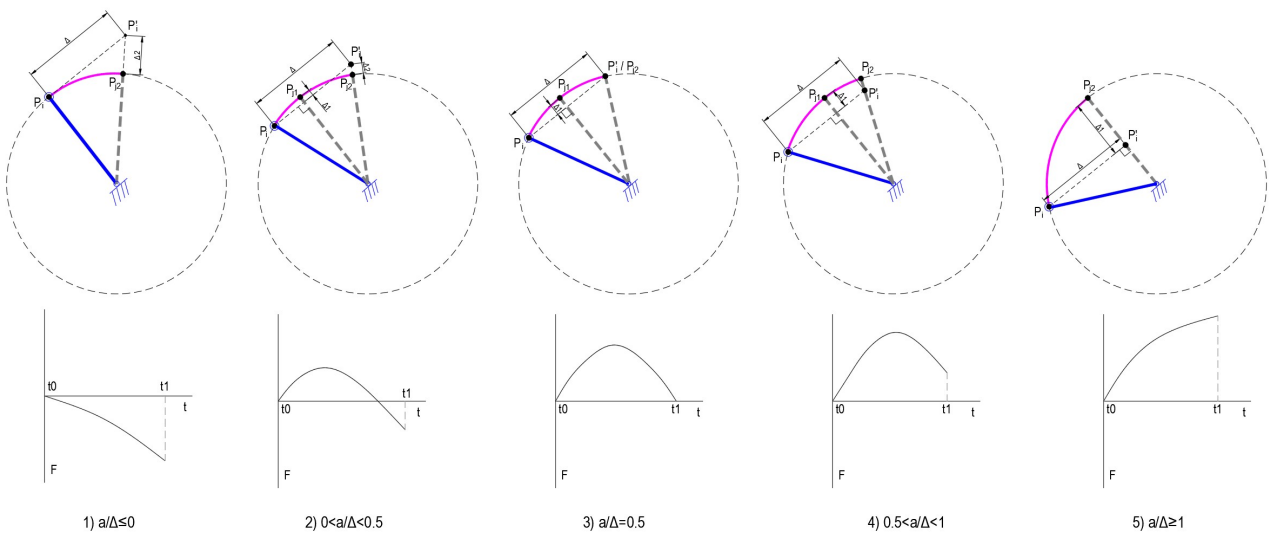


图 7 不同支座布置的温度内力规律（纵坐标向下为拉力）

图 7.1，支座设置在  $a/\Delta \leq 0$  区域范围内。变温开始后二力杆拉力由 0 逐渐加大，变形终点时二力杆拉力达到最大值；

图 7.2，支座设置在  $0 < a/\Delta < 0.5$  区域范围内。变温开始后二力杆先受压，压力由 0 逐渐加大至二力杆垂直于变形方向时达到压力最大值，后逐渐降低至 0 之后反向受拉且拉力逐渐升高，变形终点时二力杆拉力达到最大值；

图 7.3 和 7.4，支座设置在  $0.5 \leq a/\Delta < 1.0$  区域范围内。变温开始后压力由 0 先升高后降低，二力杆垂直于变形方向时，压力达到最大值；

图 7.5，支座设置在  $a/\Delta \geq 1.0$  区域范围内。变温开始后压力由 0 逐渐加大，变形终点时二力杆压力达到最大值。

综上所述，二力杆轴力  $F_n$  在变形全路径上的极值可出现在两种情况下：二力杆垂直于  $P_i P_i'$  时(状态 1)和变形到达终点时(状态 2)。由式 4 和图 6 可知当变形到达终点时  $\sin\gamma_2 = A/B$ ，即

$$\begin{aligned} \Delta_2 M &= A - L * \frac{A}{B} \\ F_2 &= \frac{A - L * \frac{A}{B}}{\frac{\Delta}{B}} * E_2 M \\ F_2 &= (B - L) * E_2 M \end{aligned} \quad (5)$$

由式 4 和图 7 可知，在  $0 \leq a/\Delta \leq 1.0$  范围内，存在二力杆垂直  $P_i P_i'$ ，即  $\gamma_1 = 90^\circ$  的情况，

$$\begin{aligned} \sin\gamma_1 &= \sin 90^\circ = 1 \\ \Delta_1 M &= A - L \\ F_1 &= (A - L) * E_1 M \end{aligned} \quad (6)$$

例取  $\Delta = 100\text{mm}$ ， $L = 150\text{mm}$ ，在不同  $\beta$  取值下代入式 5 与式 6，其曲线如图 8 所示。

在  $0 \leq a/\Delta \leq 1.0$  范围内存在  $F_n$  极值的两种可能性，即此范围内式 5 与式 6 均适用。取式 5 与式 6 绝对值最大值作为此范围内的  $F_n$  极值，曲线如图 9。  $F_n$  极值曲线在  $F_n = 0$  点上存在跳跃点，即  $F_n$  极值会极限逼近但不会等于 0。此跳跃点即为二力杆支座布置的最优点。

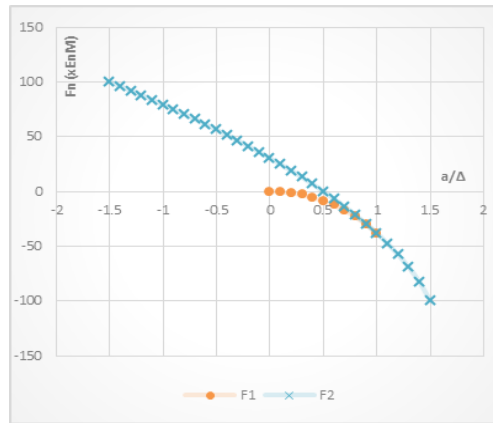


图 8  $F_n$ - $a/\Delta$  曲线

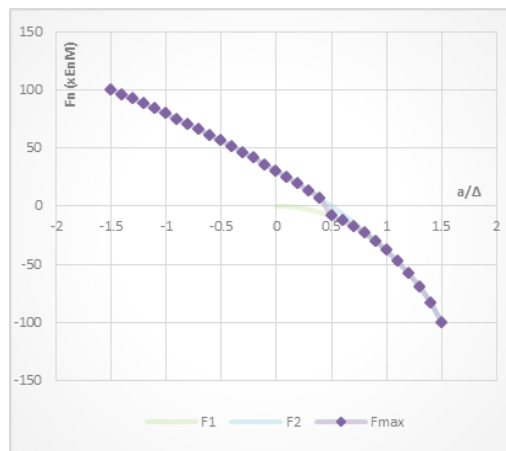


图 9 内力绝对值最大值  $F_n$ - $a/\Delta$  曲线

现取此范围内函数曲线放大，并考虑非线性分析下原物体刚度矩阵变化，现引入

二力杆垂直于  $P_i P'_i$  时，即状态 1，此状态下原物体的抗弯刚度为  $E_{1M}$

$P_i$  变化至变形终点时，即状态 2，此状态下原物体的抗弯刚度为  $E_{2M}$

$k_m$  为物体在状态 1 与状态 2 时抗弯刚度的比值，即  $E_{1M} = k_m * E_{2M}$

代入不同  $\Delta$ 、 $L$  和  $k_m$  参数变量， $F_n$  极值曲线如图 10。由图 10 可知，当状态 1 与状态 2 原物体抗弯刚度变化在较小范围内时，二力杆轴力  $F_n$  极值跳跃点始终在  $0.4 \leq a/\Delta \leq 0.45$  范围内，即当满足式 2 时温度应力最小。

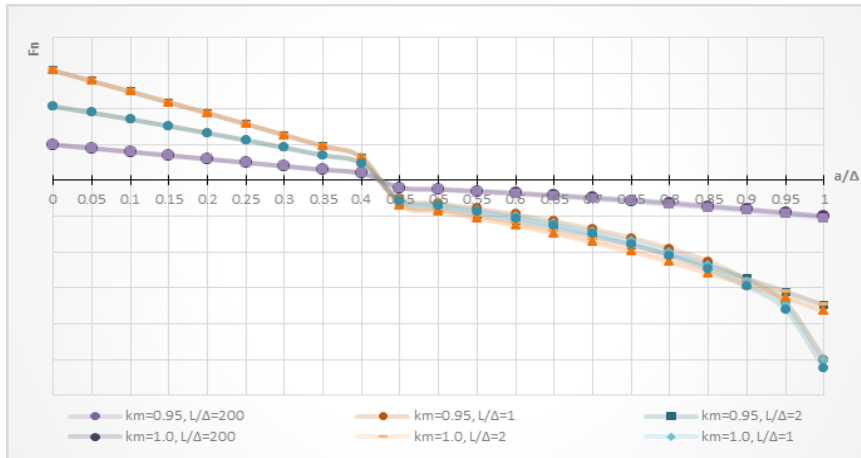


图 10 多参数的内力绝对值最大值  $F_n$ - $a/\Delta$  曲线

## 2.4 力学验证，阶段二的静力及有限元分析

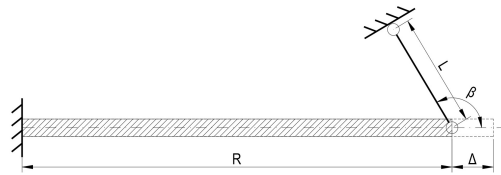


图 11

如图 11 截面为 400x20 方钢管梁，悬挑跨度  $R$ ，变温  $\Delta T=2500^{\circ}\text{C}$  工况下该悬臂梁模型的初始轴向变形为  $\Delta$ 。在悬挑端增加长度为  $L$  截面 D500 的二力杆支座，夹角为  $\beta$ 。调整  $R$ 、 $L$ 、 $\beta$  等各数据参数进行非线性弹性分析，得出各参数组合下二力杆轴力  $F_n$ 。

现以  $\cos\beta$  为  $X$  轴， $\Delta/L$  为  $Y$  轴，二力杆轴力极值  $F_n$  为  $Z$  轴绘制曲线如图 12，图中紫色长方体包裹范围为  $|F_n| \leq 50\text{kN}$  范围，此范围内曲线为红色，范围外曲线为虚线。由图可知在各参数组合下，二力杆极值曲线的跳跃点均在  $\Delta/L=2.2\cos\beta$  与  $\Delta/L=2.5\cos\beta$  两个平面内，即证式 2。

同时部分虚线在尾部呈现  $F_n$  增速快速增长的拐点，即式 1 所涵盖范围以外将存在  $F_n$  值无限大的区域，在实际应用中须避免。

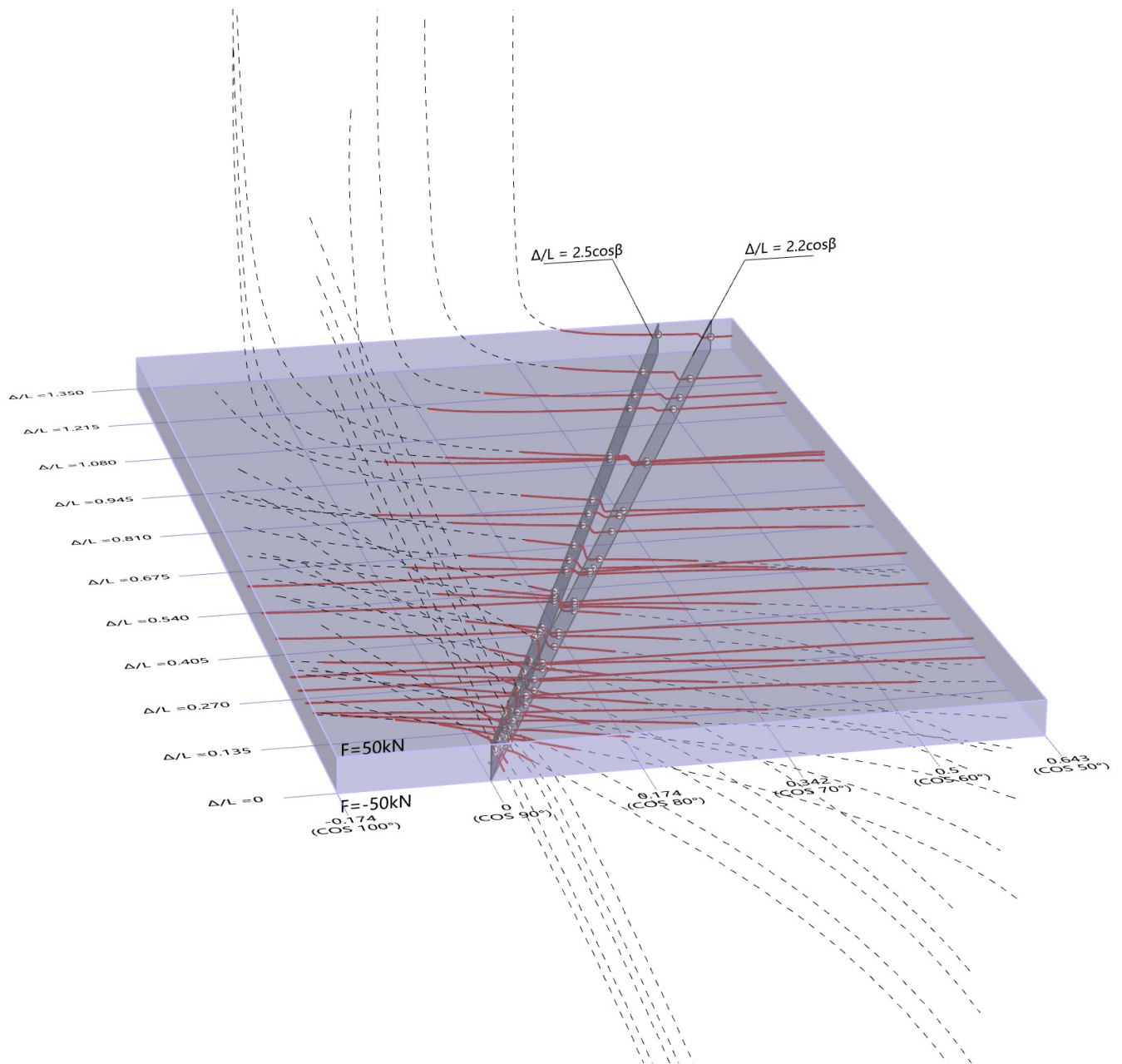


图 12 多参数的实例  $F_n-a/\Delta$  曲线

### 三、工程应用

Γ-形构在建筑工程和机械工程行业中的实例中应用。

#### 3.1 建筑工程

如图 13 所示的抚仙湖博物馆直径 300 米，周长不设缝的混凝土圆环结构。

沿环周边切向设置抗侧结构，使得形成的超静定结构体系能够可靠承受地震、风等水平力，同时温度工况下结构可沿法向自由变形，即温度应力为 0 或可忽略不计。Γ-形构保证了圆环结构的整体性、安全性和美观性。

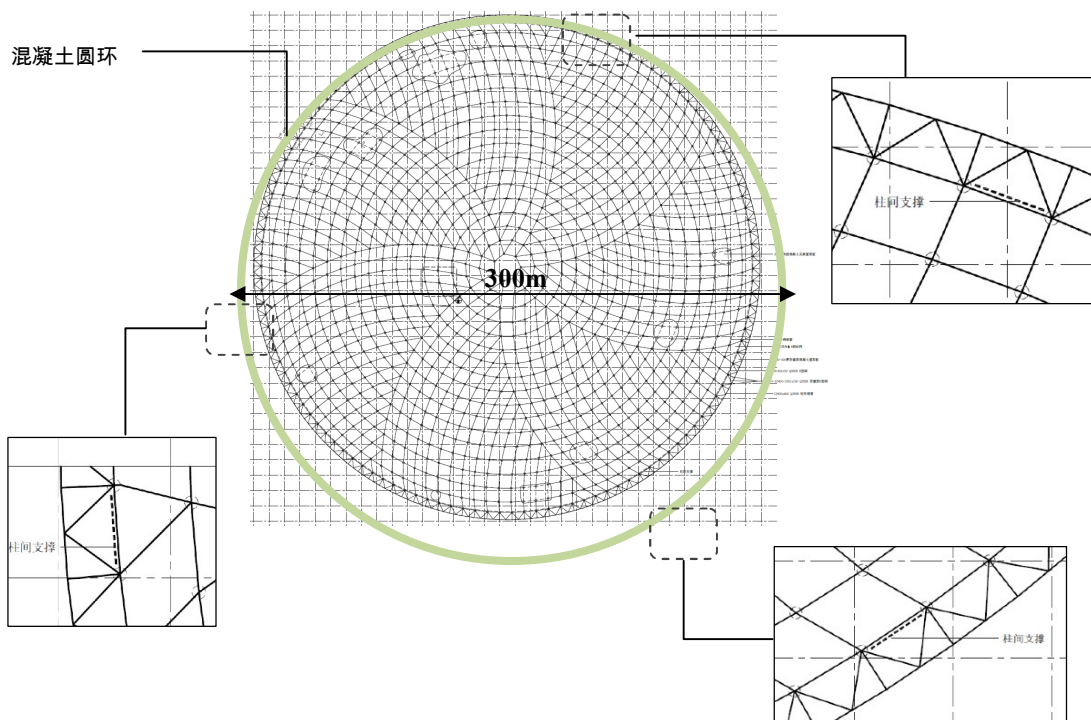


图 13 云南抚仙湖博物馆的 Γ-形构

### 3.2 机械工程

图 14 为现役 F22 战斗机的普惠 F119 发动机的构造图，其涡轮前端最高达  $2000^{\circ}\text{F}$ 。为释放高温产生的温度应力，设计采用近似静定结构，其传力途径如图 15 所示，仅在主轴上设置一个固定铰接点（邻近双滚珠轴承），发动机最大推力 156kN 全部集中于该点。其余支座均



为滚棒轴承滑动支座，意图轴向自由伸缩而不分担任何发动机推力的传递。

现对发动机受力体系进行优化。如图 16 若将原滑动支座优化为 **I**-**形**支座，根据图 16 求得支座最优属性将可实现在温度工况下的应力极小，而在动力工况下可帮助分担原铰支座推力，从而大幅降低材料强度要求，提高发动机各项指标。

同样原理也适用于 F35、J20 等的涡扇发动机。

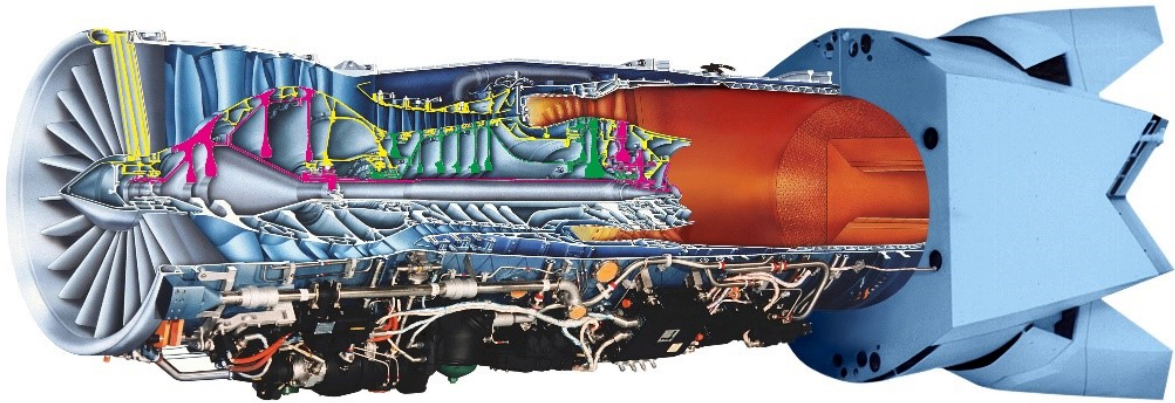


图 14 现役猛禽 F22 发动机普惠 F119 构造图

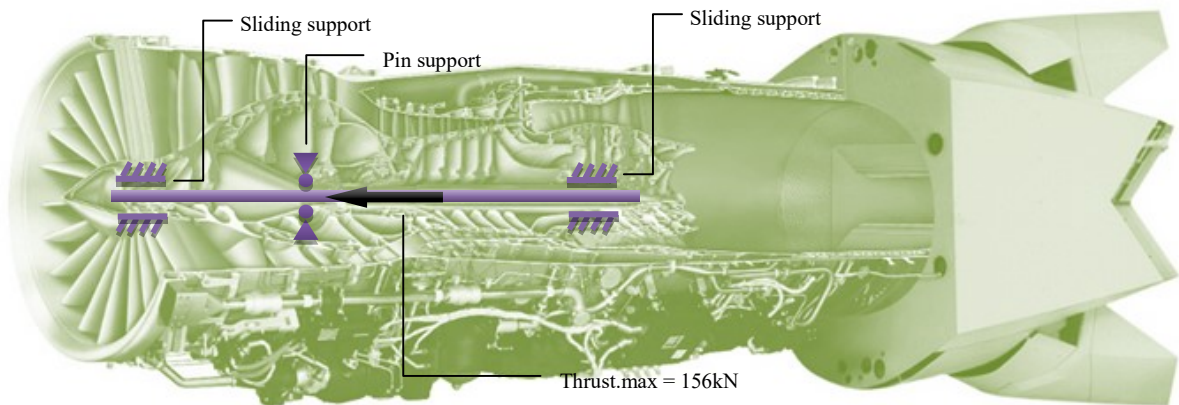
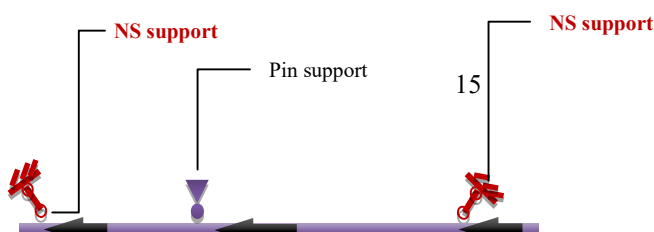


图 15 现役普惠 F119 传力途径



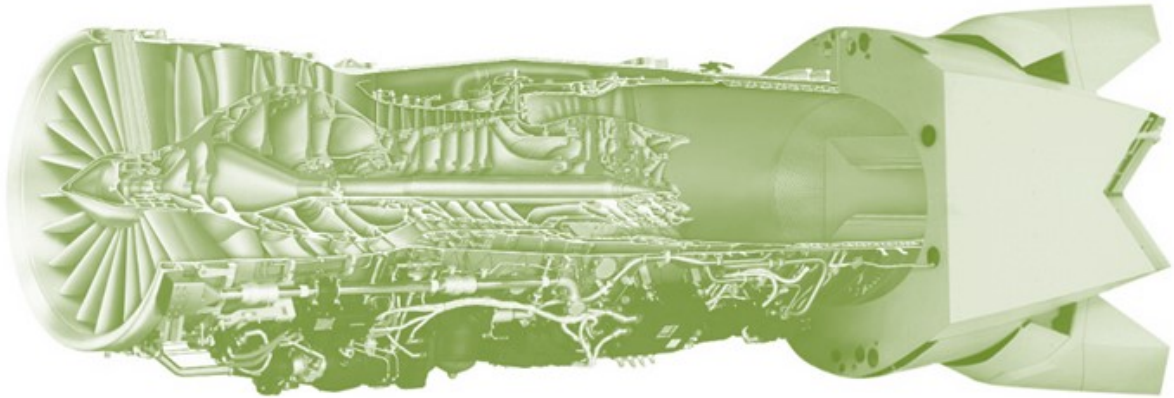


图 16 可改进普惠 F119 的 Γ-形构

#### 四、结论

Γ-形构是一个线性温度应力为 0 非线性温度应力较低的超静定结构体系构造方法。其中：

##### 4.1 对于单一材料的均匀变温情况下：

在结构体上设置数目不限的多个支座链杆，所有链杆均垂直于各自对应的控制直线，任一链杆对应的控制直线通过该链杆与结构体的连接支点，且与其它所有链杆对应的各控制直线全部汇交于任意一点。

如此布置，无论结构体的尺度大小也无论它的温度变化多少，线性分析时即使是超静定结构体系的温度应力仍恒为 0，且可以正常承受其它荷载。高阶分析时温度应力仍保持较低水平。

##### 4.2 对于任意材料任意组合的复杂温度场任意变温情况下：

分别过温度变形前后的点  $P_i$  和  $P'_i$  且垂直线段于  $P_iP'_i$  的两个平面  $S_i$  和  $S'_i$  围合的连续空间( $0 \leq a/\Delta \leq 1$ )是布置二力杆支座的合理几何区域。

当在零温度应力常数 $\gamma=0.42$ 及其邻近区域布置二力杆支座时，温度应力幅值最低。

由于  $P_i$  点是物体上的任意一点，遵循上述方法可以根据需要在物



体上的任意不同点上布置多个二力杆支座，使得它们与物体一起组成的结构体在能承受外荷载的前提下，温度应力幅值为  $0$  或最小。

在工程应用中为了整体最优可能需要在温度应力幅值这个单一目标最优（最小）上妥协，合理/最优空间的临近区域有时也会是更合适的选择。

由于增设二力杆支座的影响，从点  $P_i$  到  $P_i'$  的变形路径会有微弱偏差，当结构的几何尺度较大或温度变化较大时这种偏差可能不应被忽略，需要用迭代的方式获得并修正最终的变形点  $P_i'$ 。

**4.3** 时间仓促，非线性阶段尚多有不足之处需要更进一步的研究与完善。

**致谢：**陶辛未全面参与了非线性阶段的成稿过程，李茜茜对线性阶段做了 8 杆有限元实例的模拟验证，陈菲参与了线性分析阶段的初稿，在此一并感谢。并感谢刘耀鹏博士和冯鹏教授的肯定与指导。**Γ-形构**最初的需求来自石上纯也的建筑方案，特别感谢。

## References

### 参考文献